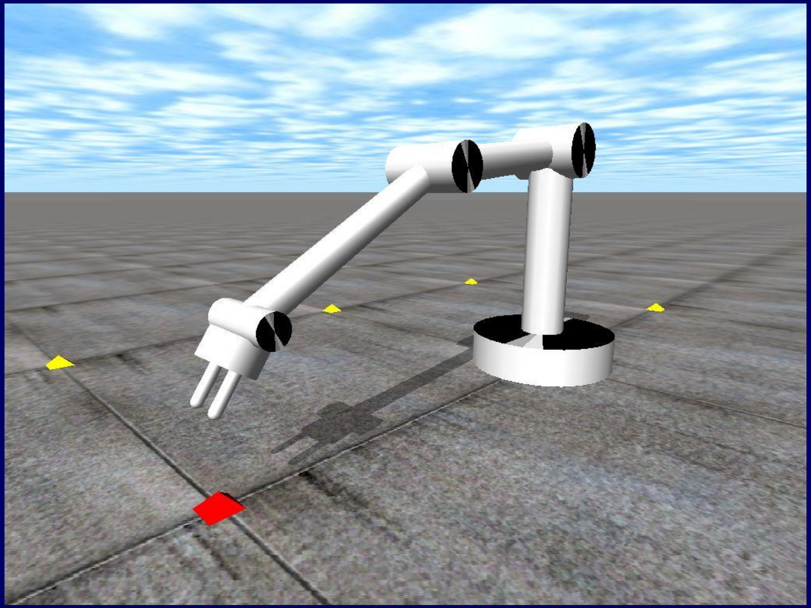
ロボットシミュレーション

ODE Dynamics Engineによるロボットプログラミング

Part3: ロボットアーム



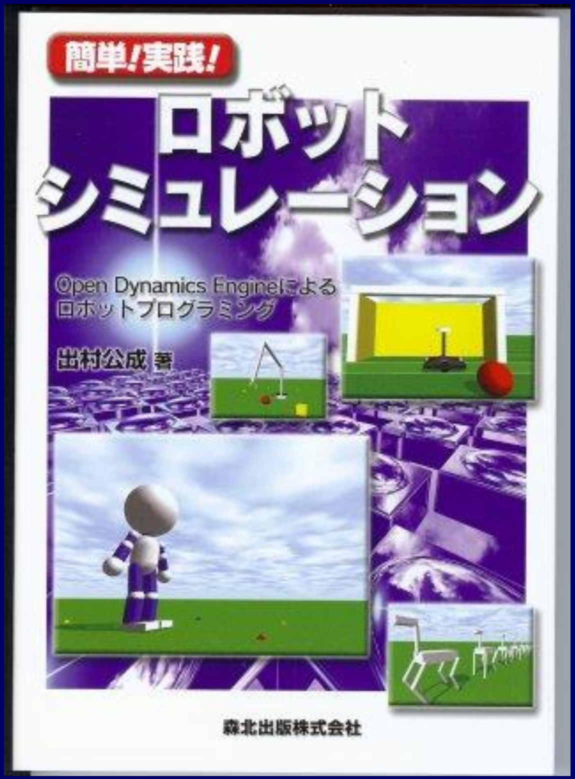
2008-6-27版

出村　公成（でむらこうせい）

[Web] http://demura.net
[Mail] info@demura.net

教科書

- 簡単！実践！ロボットシミュレーション
  Open Dynamics Engineによるロボットプログラミング
- 出村公成著
- 森北出版
- ２００７年５月
- ISBN-13: 978-4627846913



簡単！実践！ロボットシミュレーションの表紙

内　容

- １限目
  - 位置と姿勢
  - 運動学
- ２限目
  - 逆運動学
- ３限目
  - 演習

位置と姿勢

- 位　置
  - 位置ベクトルP = (x, y, z)^T
  - 参照点(重心が多い)を指定
- 姿　勢
  - 回転行列
  - 有顔ベクトル
  - ロール, ピッチ, ヨー角
  - オイラー角

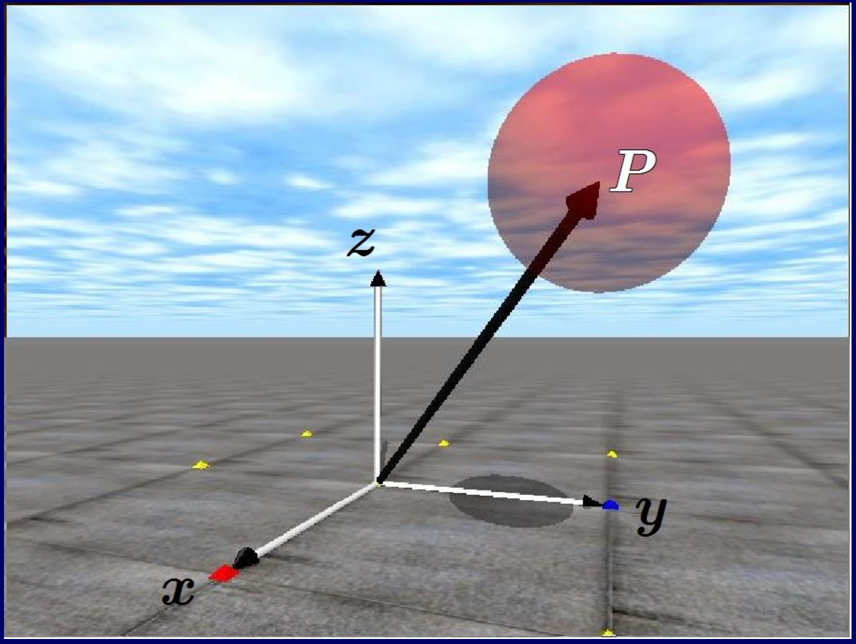


図6.1 位置ベクトルP　(教科書P146から転載)

回転行列

- まず，絶対座標系と相対座標系の各軸が一致している．その後，剛体が姿勢を変え相対座標系の各軸が以下のように変化
  - $\mathbf{i} = (1, 0, 0)^T \rightarrow \mathbf{i}' = (r11, r21, r31)^T$
  - $\mathbf{j} = (0, 1, 0)^T \rightarrow \mathbf{j}' = (r12, r22, r32)^T$
  - $\mathbf{k} = (0, 0, 1)^T \rightarrow \mathbf{k}' = (r13, r23, r33)^T$
- 回転行列

$$R_\omega(\theta) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

姿勢を表すために９個変数が必要

z軸まわりの回転

$$\mathbf{i} = (1,\ 0,\ 0)^T \rightarrow \mathbf{i}' = (\cos\theta, \sin\theta, 0)^T$$
$$\mathbf{j} = (0,\ 1,\ 0)^T \rightarrow \mathbf{j}' = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)^T$$
$$\mathbf{k} = (0,\ 0,\ 1)^T \rightarrow \mathbf{k}' = (0,\ 0, 1)^T$$

回転行列

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

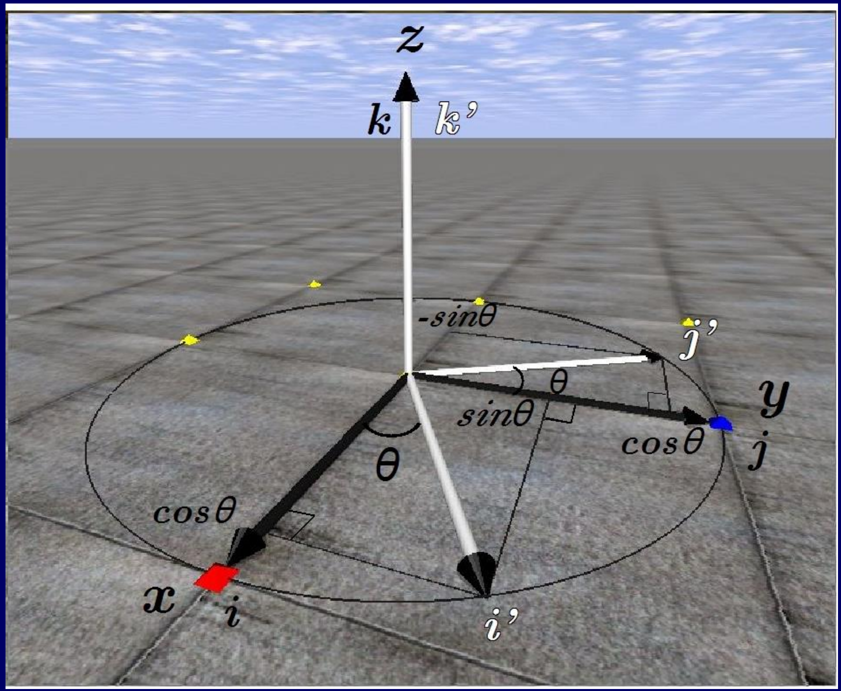


図6.2 z軸まわりの回転　(教科書P147から転載）

P148 EX6.2

- x軸，y軸まわりの回転行列を求めてください．

有顔(ゆうがん)ベクトル

- 1つのベクトル(主軸ベクトル)とそれに直交するベクトル(副軸ベクトル)によって物体の姿勢を表す方法
- 主軸ベクトル
  - $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)^T$
  - $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)^T$

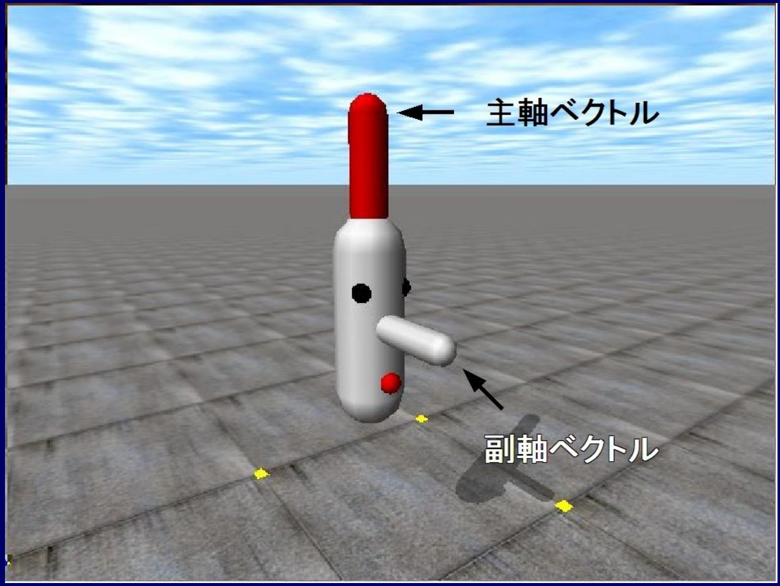


図6.3 有顔ベクトル　(教科書P149から転載)

姿勢を表すために6個変数が必要

有顔ベクトル

- 回転行列との関係

有顔ベクトルでは 2 個のベクトルで姿勢を決めることができるので，姿勢を表すには 6 個の変数があれば十分です．有顔ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)^T$ ，$\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)^T$ は式 (6.5) に示すように，回転行列に基準姿勢での有顔ベクトル $\hat{\boldsymbol{a}} = (\hat{a}_x, \hat{a}_y, \hat{a}_z)^T$, $\hat{\boldsymbol{b}} = (\hat{b}_x, \hat{b}_y, \hat{b}_z)^T$ を右から掛けると求めることができます．

$$\begin{bmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_x & \hat{b}_x \\ \hat{a}_y & \hat{b}_y \\ \hat{a}_z & \hat{b}_z \end{bmatrix} \tag{6.5}$$

ロール・ピッチ・ヨー角

- 絶対座標系のx, y, z軸の順番で回転
  - ロール：x軸まわり
  - ピッチ：y軸まわり
  - ヨー：　z軸まわり
- ロール, ピッチ, ヨーの順番で物体を回転

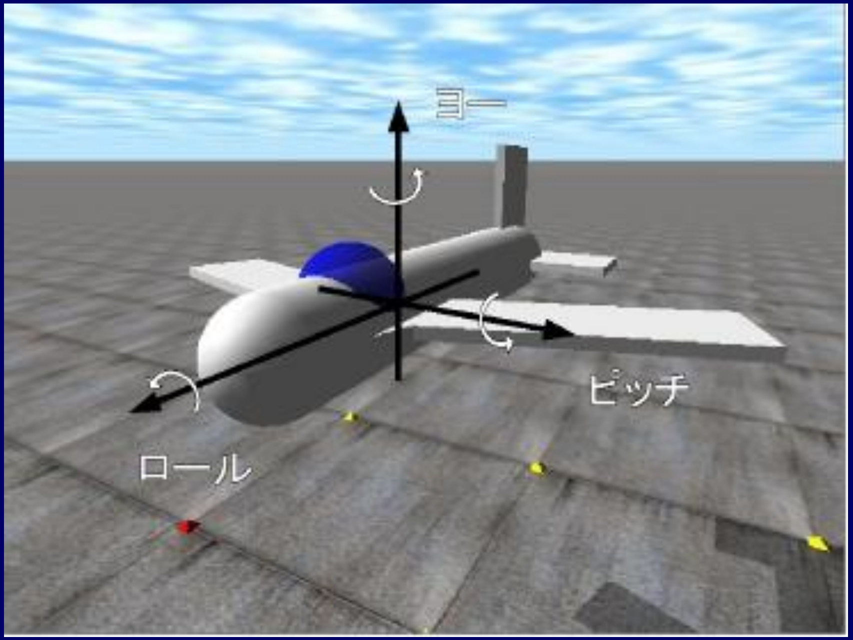


図6.4 ロール・ピッチ・ヨー　(教科書P149から転載）

ロール·ピッチ·ヨー角

- **回転行列との関係**

重要な点は回転する順番と行列を掛ける順番との対応です．行列の積が複数連続している場合は，右から左へ行列を計算するので次式の行列の順番で良いのです．

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = R_z(Y)R_y(P)R_x(R) \tag{6.6}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos Y & -\sin Y & 0 \\ \sin Y & \cos Y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos P & 0 & \sin P \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin P & 0 & \cos P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos R & -\sin R \\ 0 & \sin R & \cos R \end{bmatrix} \tag{6.7}$$

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_Y C_P & C_Y S_P S_R - S_Y C_R & C_Y S_P C_R + S_Y S_R \\ S_Y C_P & S_Y S_P S_R + C_Y C_R & S_Y S_P C_R - C_Y S_R \\ -S_P & C_P S_R & C_P C_R \end{bmatrix} \tag{6.8}$$

ロール･ピッチ･ヨー角

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_Y C_P & C_Y S_P S_R - S_Y C_R & C_Y S_P C_R + S_Y S_R \\ S_Y C_P & S_Y S_P S_R + C_Y C_R & S_Y S_P C_R - C_Y S_R \\ -S_P & C_P S_R & C_P C_R \end{bmatrix} \tag{6.8}$$

式(6.8)を解くと次式になる　(P150).

$$P = \mathrm{atan2}(-r_{31}, \pm\sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}) \tag{6.13}$$

$$Y = \mathrm{atan2}(r_{21}, r_{11}) \tag{6.14}$$

$$R = \mathrm{atan2}(r_{32}, r_{33}) \tag{6.15}$$

ZYXオイラー角

- 相対座標系の軸で3回回転
- 回転する軸の選び方で12種類
  - 同じ軸を連続して選んではいけない
  - XYZ, XZY, XYX, XZX, YXZ, YZX
  - YXY, YZY, ZXY, ZYX, ZXZ, ZYZ

ZYXオイラー角

- 相対座標系でZ, Y, Xの順で回転

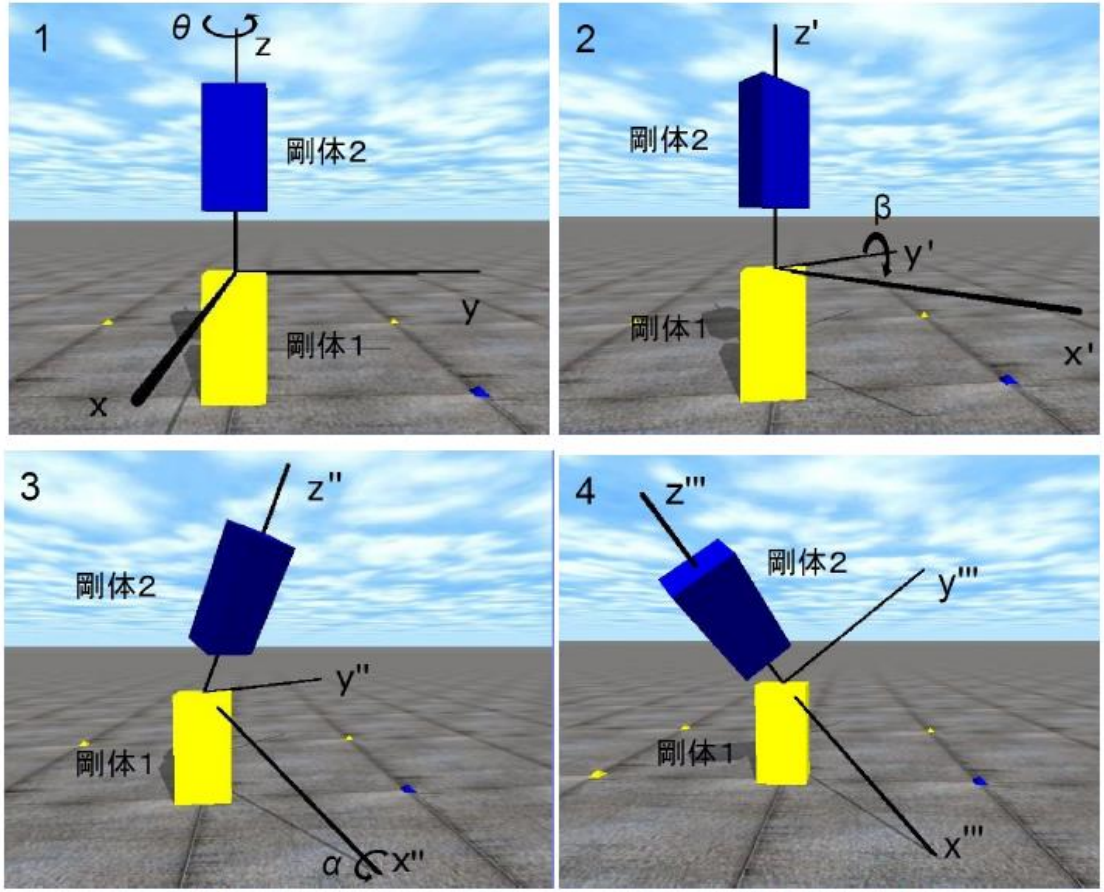


図 6.5　ZYX オイラー角：z 軸，y' 軸，x'' 軸の順番で回転

(教科書P151から転載）

ZYXオイラー角

- 絶対座標系の回転行列で計算

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = R_z(\theta)R_y(\beta)R_x(\alpha)$$

$$= \begin{bmatrix} C_\theta & -S_\theta & 0 \\ S_\theta & C_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\beta & 0 & S_\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_\beta & 0 & C_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_\alpha & -S_\alpha \\ 0 & S_\alpha & C_\alpha \end{bmatrix} \qquad (6.16)$$

重要:
相対座標系で各軸の回転行列をかける順番と絶対座標系でかける順番は逆になる

ZYXオイラー角

- EX 6.3
  - 定義どおりに計算してみよう
  - 式(6.17)を使うこと

同じになるはず．ただし，計算は大変

ロボットアーム

- ハンド (hand)：物を押したり，掴んだりなど外界に作用を及ぼすパーツ.
- ジョイント (joint)：人間の関節のように他のパーツの姿勢を変えるパーツ.
- リンク (link)：ロボットを形作っている棒状のパーツ．リンクはジョイントにより他のリンクと結合されています.

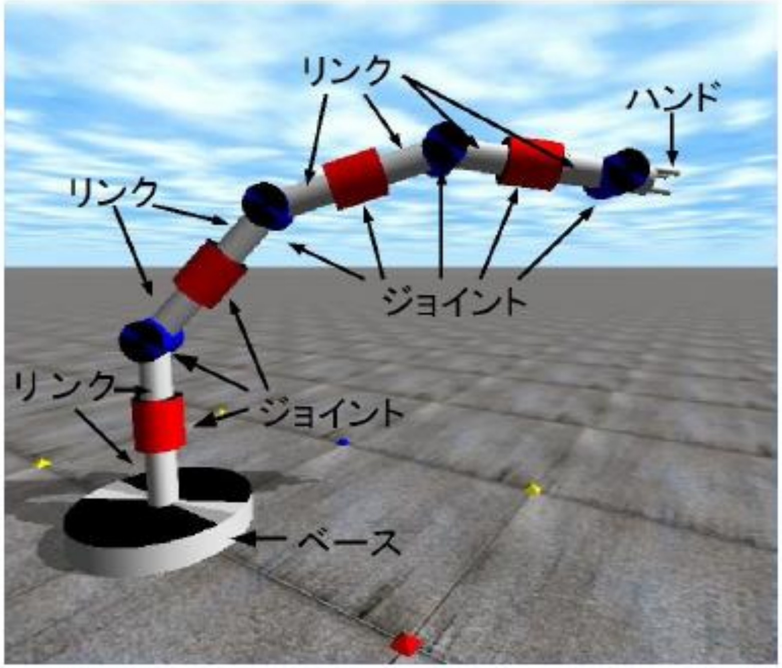


図 6.6　各部の名前

(教科書P153から転載）

ロボットアームの表記

- $\boldsymbol{l}_i$: i 番目のリンク.
- $\boldsymbol{J}_i$: i 番目のジョイント.
- $\boldsymbol{P}$: ハンド先端の位置ベクトル.

リンクベクトル $\boldsymbol{l}_i \ (i = 0, 1, \ldots, n)$

回転軸ベクトル $\boldsymbol{s}_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)$

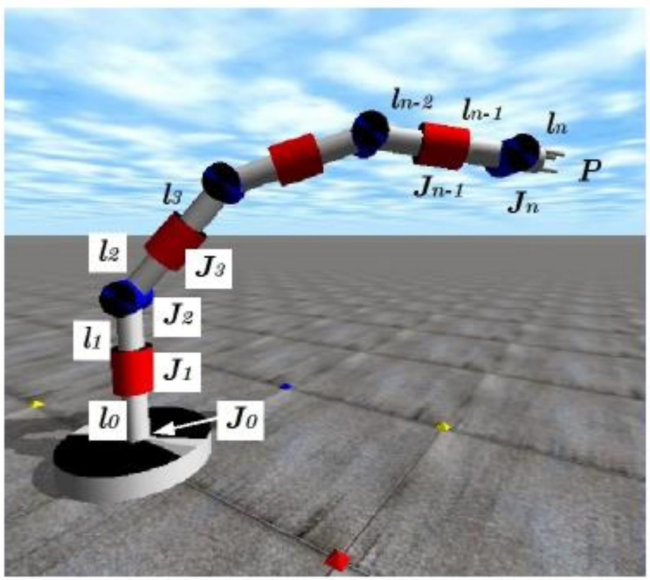


図 6.7　表記法

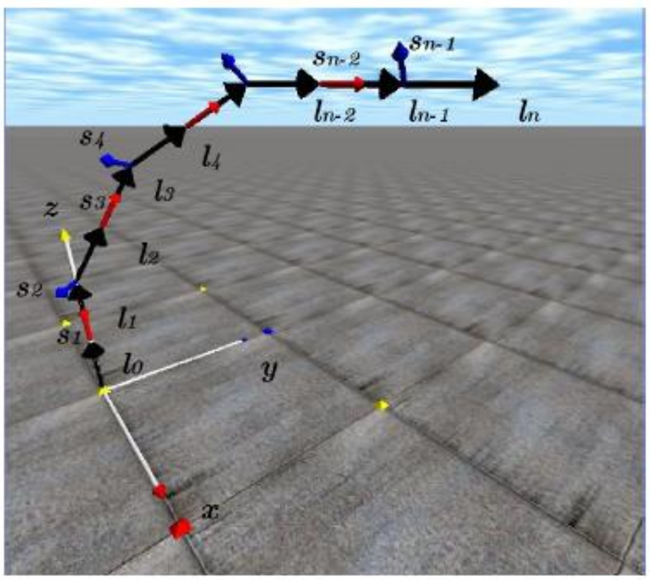


図 6.8　ベクトルによる表記法

(教科書P154から転載)

運動学

- 関節角から手先位置と姿勢を求める

$$P = f(\theta)$$

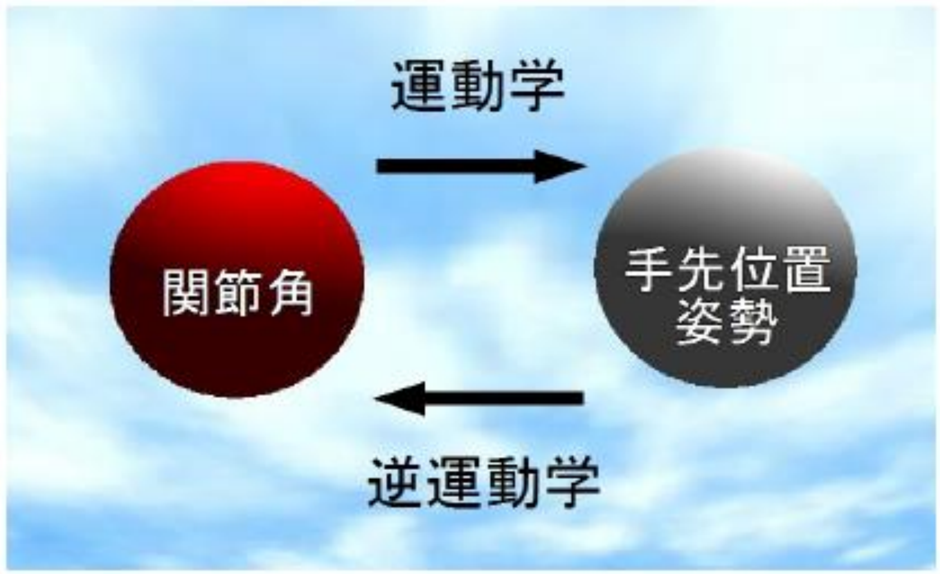


図 6.10　運動学と逆運動学

(教科書P154から転載）

逆運動学

- 手先位置と姿勢から関節角を求める

$$\theta = f^{-1}(P)$$

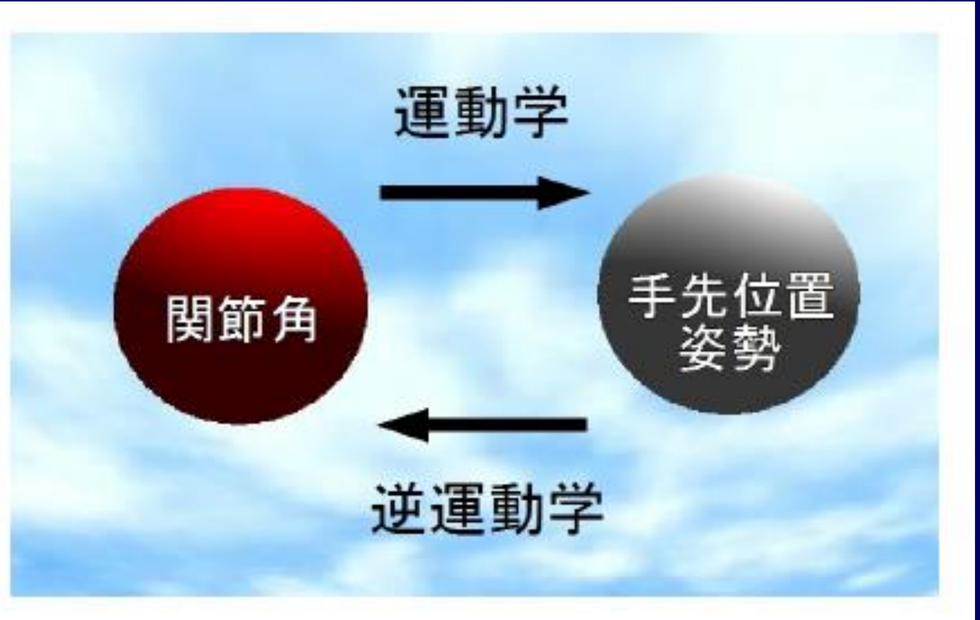


図 6.10　運動学と逆運動学

(教科書P154から転載）

運動学の求め方（広瀬の方法）

運動学の解き方

ステップ 1：初期姿勢とそのリンクベクトル $\hat{\boldsymbol{l}}_i$，回転軸ベクトル $\hat{\boldsymbol{s}}_i$，有顔ベクトル ($\hat{\boldsymbol{a}}$，$\hat{\boldsymbol{b}}$) を設定します．初期姿勢は絶対座標系の軸に沿わせると計算が簡単になります．

ステップ 2：アーム先端の位置 $\boldsymbol{P}$ を次式で求めます．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P} &= \hat{\boldsymbol{l}}_0 + R_1(\hat{\boldsymbol{l}}_1 + R_2(\hat{\boldsymbol{l}}_2 + R_3(\hat{\boldsymbol{l}}_3 + \cdots + R_{n-1}(\hat{\boldsymbol{l}}_{n-1} + R_n(\hat{\boldsymbol{l}}_n))))) \quad (6.21)\\ &= \boldsymbol{l}_0 + R_1(\hat{\boldsymbol{l}}_1) + R_1R_2(\hat{\boldsymbol{l}}_2) + R_1R_2R_3(\hat{\boldsymbol{l}}_3) + \cdots + R_1R_2\cdots R_{n-1}R_n(\hat{\boldsymbol{l}}_n)\\ &= \boldsymbol{l}_0 + {}^0R_1(\hat{\boldsymbol{l}}_1) + {}^0R_2(\hat{\boldsymbol{l}}_2) + {}^0R_3(\hat{\boldsymbol{l}}_3) + \cdots + {}^0R_{n-1}(\hat{\boldsymbol{l}}_{n-1}) + {}^0R_n(\hat{\boldsymbol{l}}_n)\\ &= \boldsymbol{l}_0 + \boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{l}_2 + \boldsymbol{l}_3 + \cdots + \boldsymbol{l}_{n-1} + \boldsymbol{l}_n\end{aligned}$$

ここで，${}^0R_i = R_1R_2\cdots R_{i-1}R_i$ です．なお，R_i は i 番目のジョイントの回転行列．

ステップ 3：アーム先端の姿勢 (有顔ベクトル)$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ を次式で求めます．

$$\boldsymbol{a} = {}^0R_n(\hat{\boldsymbol{a}}) \quad (6.22)$$

$$\boldsymbol{b} = {}^0R_n(\hat{\boldsymbol{b}}) \quad (6.23)$$

(教科書P155から転載）

２自由度ロボットアーム　P156

- 求めよう

３自由度ロボットアーム P158

- 求めよう

6自由度ロボットアーム P159

- 求めよう

３自由度ロボットアームを作ろう！　P162

- プログラム6.1の説明

運動学を組み込もう　P167

- プログラム6.2の説明をする.

位置･姿勢センサを組み込もう P168

- 位置 P103
  - const dReal *dBodyGetPosition(dBodyID)
- 姿勢 P103
  - const dReal *dBodyGetRotation(dBodyID)
- 戻り値はいずれも配列へのポインタ

行列計算するには　P169

- **Void dMultiply0(dReal *A, dReal *B, dReal *C, int p, int q, int r)**
- **A = B x C**
  - **A: p行r列**
  - **B: p行q列**
  - **C: q行r列**

6.5 逆運動学

- 手先位置と姿勢から関節角を求める

$$\theta = f^{-1}(\boldsymbol{P})$$

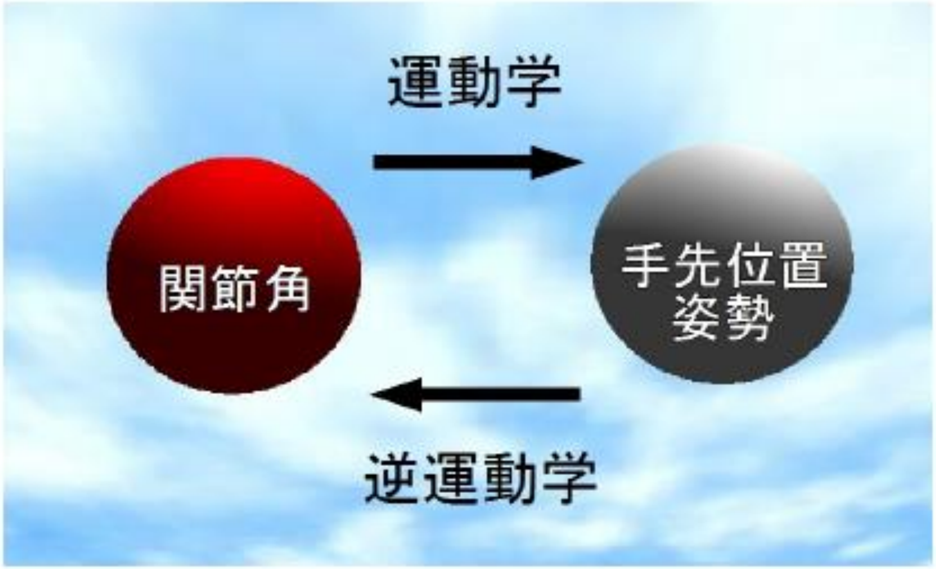


図 6.10　運動学と逆運動学

(教科書P154から転載）

逆運動学

- 一般に解が一つではない.
- ない場合もある.
- 重　要 (P171)
  - 手先位置(x, y, z)と姿勢(ロール、ピッチ、ヨー)を自由に決めるためにはロボットの自由度(関節)が6個以上なければならない。
  - 自由度が7個以上ある場合は解が無数に存在する。

２自由度ロボットアームの逆運動学

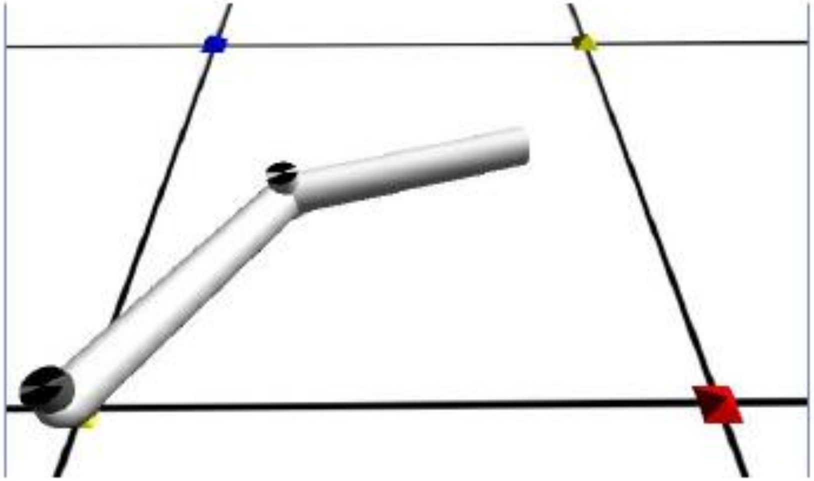


図 6.18　2 自由度ロボットアーム

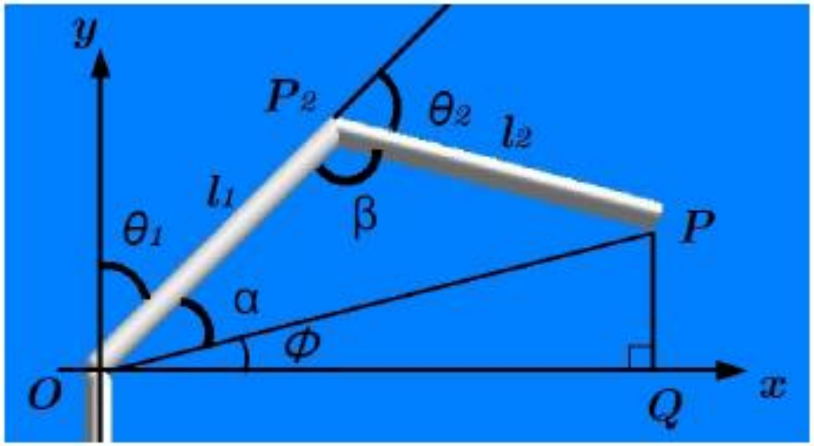


図 6.19　真上から見た図

教科書P171から転載

逆運動学の解法1

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \tag{6.57}$$

- 数式から求める方法（解析的）

EX **6.6**　式 (6.57) を θ_1，θ_2 について解けば逆運動学を求めることができます．高校の 3 角関数の知識があれば解けるのでエクササイズとしましょう．

ヒント　次の 3 角関数の合成公式を使います．

$$A \sin\theta + B \cos\theta = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\theta + \phi)$$

ここで，$\phi = \mathrm{atan2}(B, A)$

２自由度ロボットアームの逆運動学

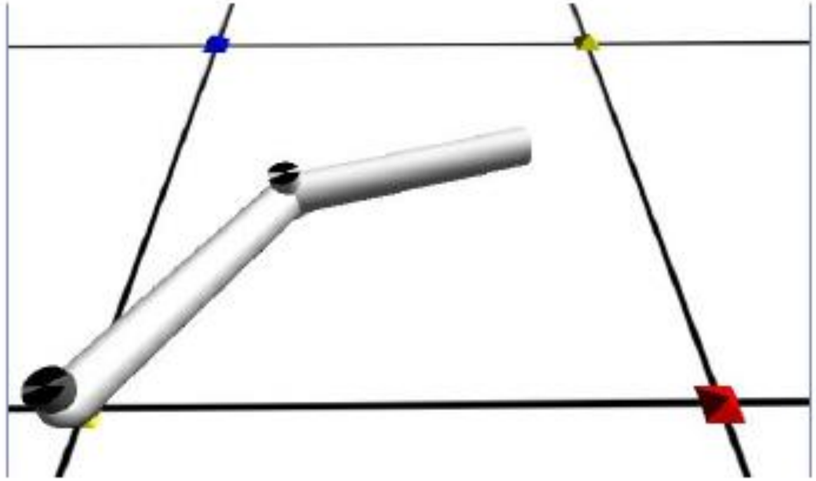


図 6.18　2 自由度ロボットアーム

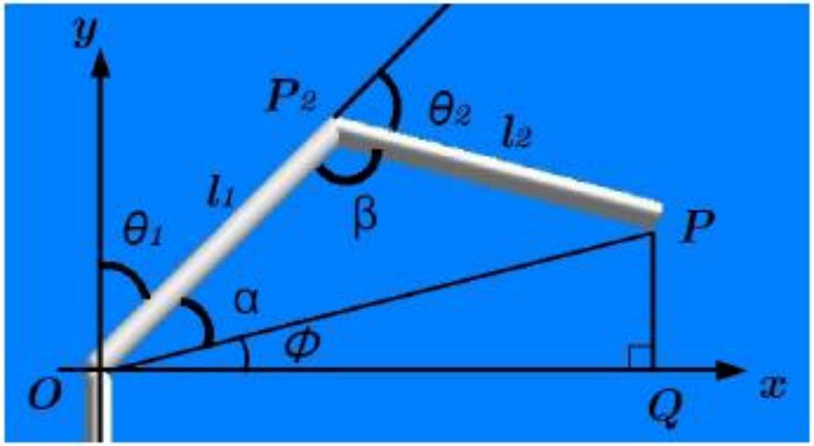


図 6.19　真上から見た図

教科書P171から転載

逆運動学の解法２

- 幾何学的に解く方法

図 6.19 から逆運動学を求めましょう．まず，θ_1 を求めます．図 6.19 に示すように リンク 1，リンク 2 の長さをそれぞれ l_1，l_2，先端位置をそれぞれ P_2，P とし，P から x 軸に垂線を降ろし，その交点を Q とします．θ_1 は

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} - (\phi + \alpha) \tag{6.58}$$

となり，ϕ はアーム先端位置 $P(P_x, P_y)$ がわかっているので直角三角形 OPQ に着目すると

$$\phi = \mathrm{atan2}(\overline{PQ}, \overline{OQ}) = \mathrm{atan2}\left(P_y, P_x\right) \tag{6.59}$$

となります．

教科書P172から転載

幾何学的に解く方法

$\overline{OP_2}$ と $\overline{OP}$ の成す角 α については三角形 OP_2P に着目し余弦定理を適用すると.

$$C_\alpha = \frac{{l_1}^2 + \overline{OP}^2 - {l_2}^2}{2l_1\overline{OP}}, \ S_\alpha = \pm\sqrt{1 - {C_\alpha}^2} \tag{6.60}$$

ここで, $\overline{OP} = \sqrt{{P_x}^2 + {P_y}^2}$ (6.61)

$$\tan\alpha = \frac{S_\alpha}{C_\alpha} \tag{6.62}$$

$$\alpha = \mathrm{atan2}\left(\pm\sqrt{1 - {C_\alpha}^2}, C_\alpha\right) = \pm\mathrm{atan2}\left(\sqrt{1 - {C_\alpha}^2}, C_\alpha\right) \tag{6.63}$$

ゆえに, $\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \mathrm{atan2}\,(P_y, P_x) - \mathrm{atan2}\left(\sqrt{1 - {C_\alpha}^2}, C_\alpha\right)$ (6.64)

または, $\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \mathrm{atan2}\,(P_y, P_x) + \mathrm{atan2}\left(\sqrt{1 - {C_\alpha}^2}, C_\alpha\right)$ (6.65)

θ_1 は 2 つの解があります.

次に θ_2 を求めます. 図 6.19 より次式となります.

$$\theta_2 = \pi - \beta \tag{6.66}$$

教科書P172から転載

幾何学的に解く方法

次に β を求めます．$\overline{OP_2}$ と $\overline{P_2P}$ の成す角を β とします．β を求めるために三角形 OP_2P の β について余弦定理を適用します．

$$C_\beta = \frac{{l_1}^2 + {l_2}^2 - \overline{OP}^2}{2l_1l_2},\ S_\beta = \pm\sqrt{1 - {C_\beta}^2} \tag{6.67}$$

$$\beta = \mathrm{atan2}\left(\pm\sqrt{1 - {C_\beta}^2}, C_\beta\right) = \pm\mathrm{atan2}\left(\sqrt{1 - {C_\beta}^2}, C_\beta\right) \tag{6.68}$$

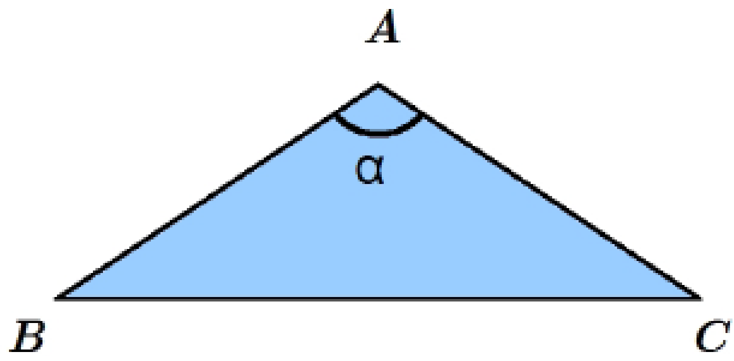
ゆえに，$\theta_2 = \pi - \mathrm{atan2}\left(\sqrt{1 - {C_\beta}^2}, C_\beta\right)$，

または，$\pi + \mathrm{atan2}\left(\sqrt{1 - {C_\beta}^2}, C_\beta\right)$ (6.69)

以上，θ_1，θ_2 はそれぞれ 2 個の解をもっていますが，θ_1 が決まると θ_2 は決まるので 2 通りの姿勢を取ることができます．

教科書P173から転載

余弦定理



三角形 ABC に対して以下の式が成り立ちます.

$$\overline{BC}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2 - 2\overline{CA} \cdot \overline{AB} \cos \alpha \tag{6.70}$$

教科書P173から転載

3自由度ロボットアームの逆運動学

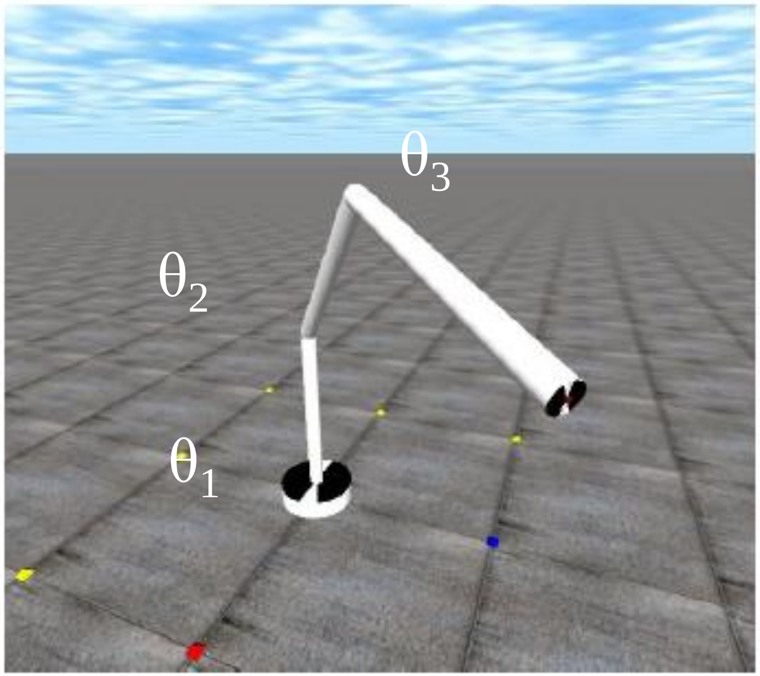


図 6.20　3 自由度ロボットアーム

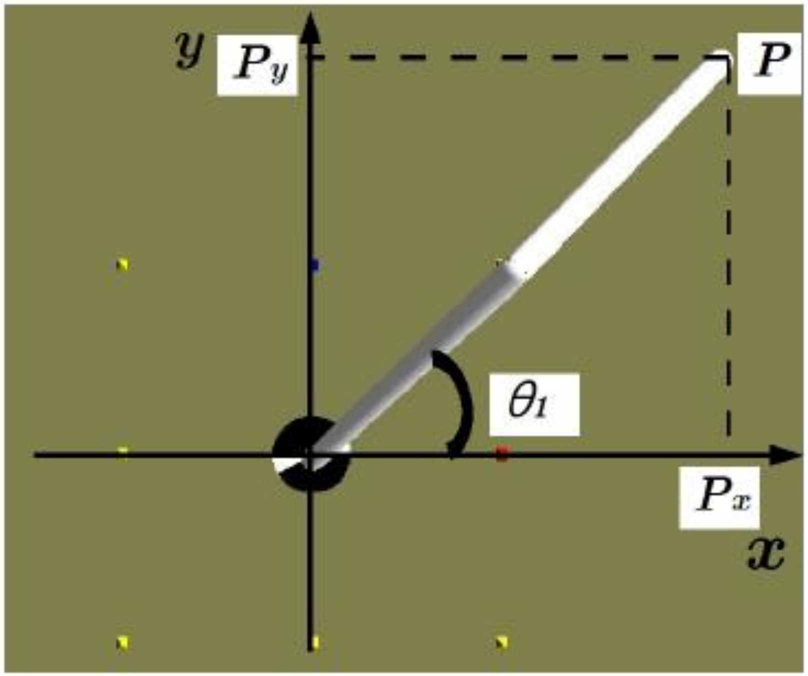


図 6.21　真上から見た図

教科書P174から転載

逆運動学解法 θ1

Θ1：アームの土台に
　　取り付けられた旋回角

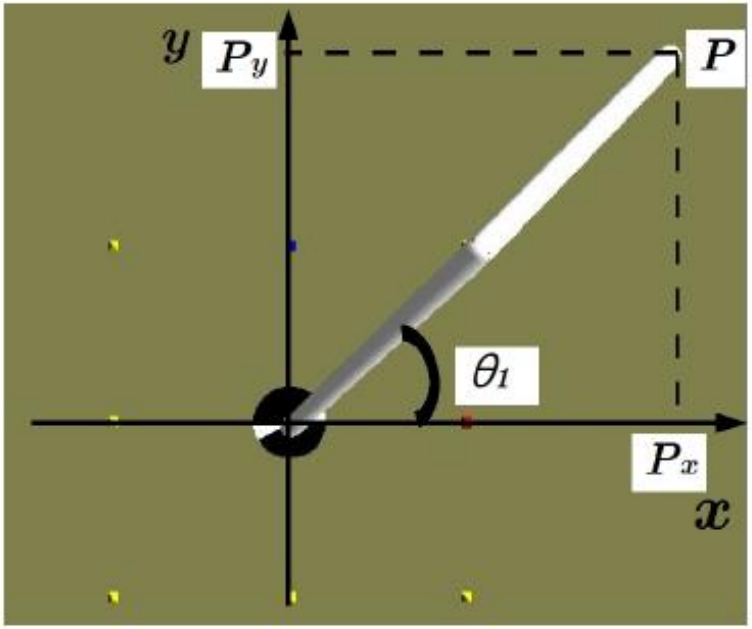


図 6.21　真上から見た図

$$\tan\theta_1 = \frac{P_y}{P_x} \qquad (6.71)$$

$$\theta_1 = \mathrm{atan2}(P_y, P_x),\ \text{または}\ \mathrm{atan2}(P_y, P_x) + \pi \qquad (6.72)$$

教科書P174から転載

逆運動学解法　θ_2

次に θ_2 を求めます．図 6.22 に示すようにリンク 1，リンク 2，リンク 3 の長さをそれぞれ l_1，l_2，l_3，先端位置をそれぞれ P_1，P_2，P とし，P_1 から xy 平面に平行な直線と P から z 軸に平行な直線の交点を Q とします．なお，l_0 はリンク 0(ベース) の長さです．θ_2 に次式となり，

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} - (\phi + \alpha) \tag{6.73}$$

ϕ はアーム先端位置 $P(P_x, P_y, P_z)$ がわかっているので，直角三角形 P_1PQ に着目す

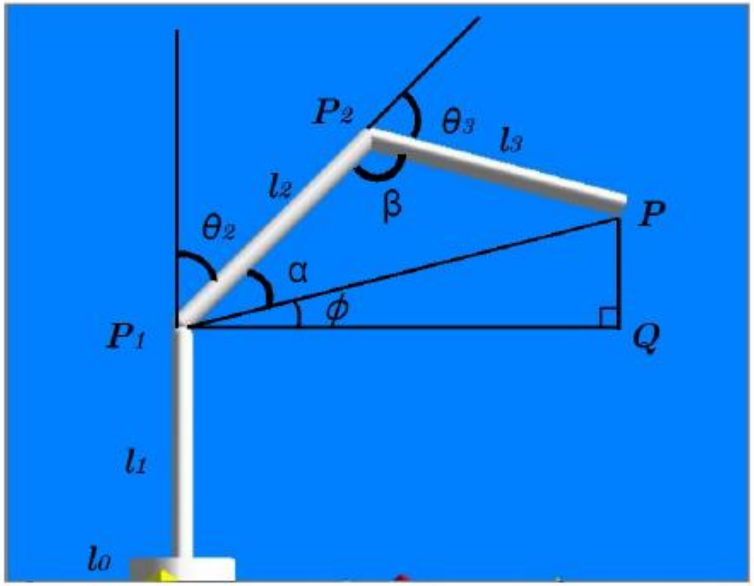


図 6.22　真横から見た図

教科書P174から転載

逆運動学解法　θ2

$$\phi = \mathrm{atan2}(\overline{PQ}, \overline{P_1Q}) = \mathrm{atan2}\left(P_z - l_0 - l_1, \sqrt{{P_x}^2 + {P_y}^2}\right) \tag{6.74}$$

$\overline{P_1P_2}$ と $\overline{P_1P}$ の成す角 α については，三角形 P_1P_2P に着目し余弦定理を適用すると，

$$C_\alpha = \frac{{l_2}^2 + \overline{P_1P}^2 - {l_3}^2}{2l_2\overline{P_1P}}, S_\alpha = \pm\sqrt{1 - {C_\alpha}^2} \tag{6.75}$$

ここで，$\overline{P_1P} = \sqrt{{P_x}^2 + {P_y}^2 + (P_z - (l_0 + l_1))^2}$　(6.76)

$$\tan\alpha = \frac{S_\alpha}{C_\alpha} \tag{6.77}$$

$$\alpha = \mathrm{atan2}\left(\pm\sqrt{1 - {C_\alpha}^2}, C_\alpha\right) = \pm\mathrm{atan2}\left(\sqrt{1 - {C_\alpha}^2}, C_\alpha\right) \tag{6.78}$$

ゆえに，$\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \mathrm{atan2}\left(P_z - l_0 - l_1, \sqrt{{P_x}^2 + {P_y}^2}\right) \mp \mathrm{atan2}\left(\sqrt{1 - {C_\alpha}^2}, C_\alpha\right)$　(6.79)

となります．θ_2 は 2 つの解をもち，図 6.23 と図 6.25 に対応しています．

教科書P175から転載

逆運動学解法　θ_2

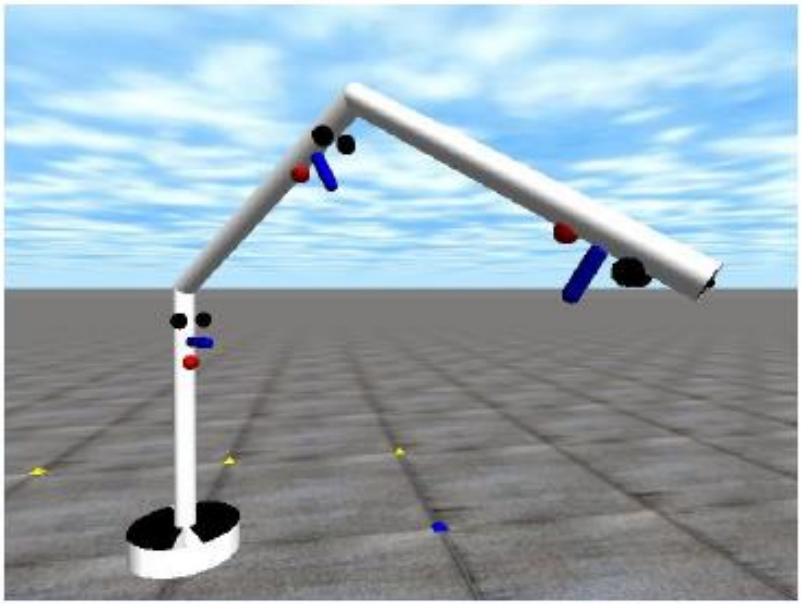


図 6.23　姿勢 1

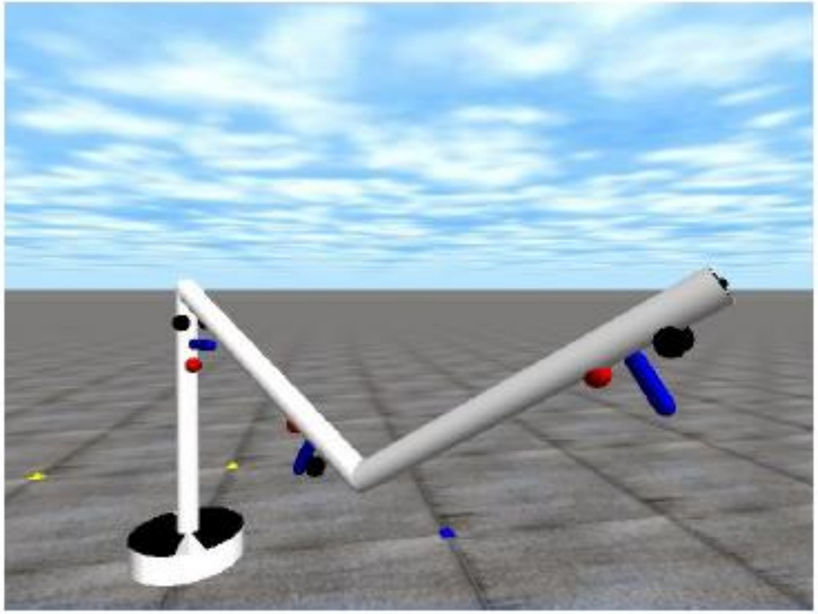


図 6.25　姿勢 2

教科書P176から転載

逆運動学解法　θ3

次に θ_3 を求めます．図 6.22 より次式となります．

$$\theta_3 = \pi - \beta \tag{6.80}$$

次に β を求めます．$\overline{P_1P_2}$ と $\overline{P_2P}$ の成す角を β とします．β を求めるためにまた三角形 P_1P_2P の β について余弦定理を適用します．

$$C_\beta = \frac{{l_2}^2 + {l_3}^2 - \overline{P_1P}^2}{2l_2l_3},\ S_\beta = \pm\sqrt{1 - {C_\beta}^2} \tag{6.81}$$

$$\beta = \mathrm{atan2}\left(\pm\sqrt{1 - {C_\beta}^2}, C_\beta\right) = \pm\mathrm{atan2}\left(\sqrt{1 - {C_\beta}^2}, C_\beta\right) \tag{6.82}$$

ゆえに，$\theta_3 = \pi \mp \mathrm{atan2}\left(\sqrt{1 - {C_\beta}^2}, C_\beta\right)$ (6.83)

教科書P175から転載

逆運動学解法　θ_3

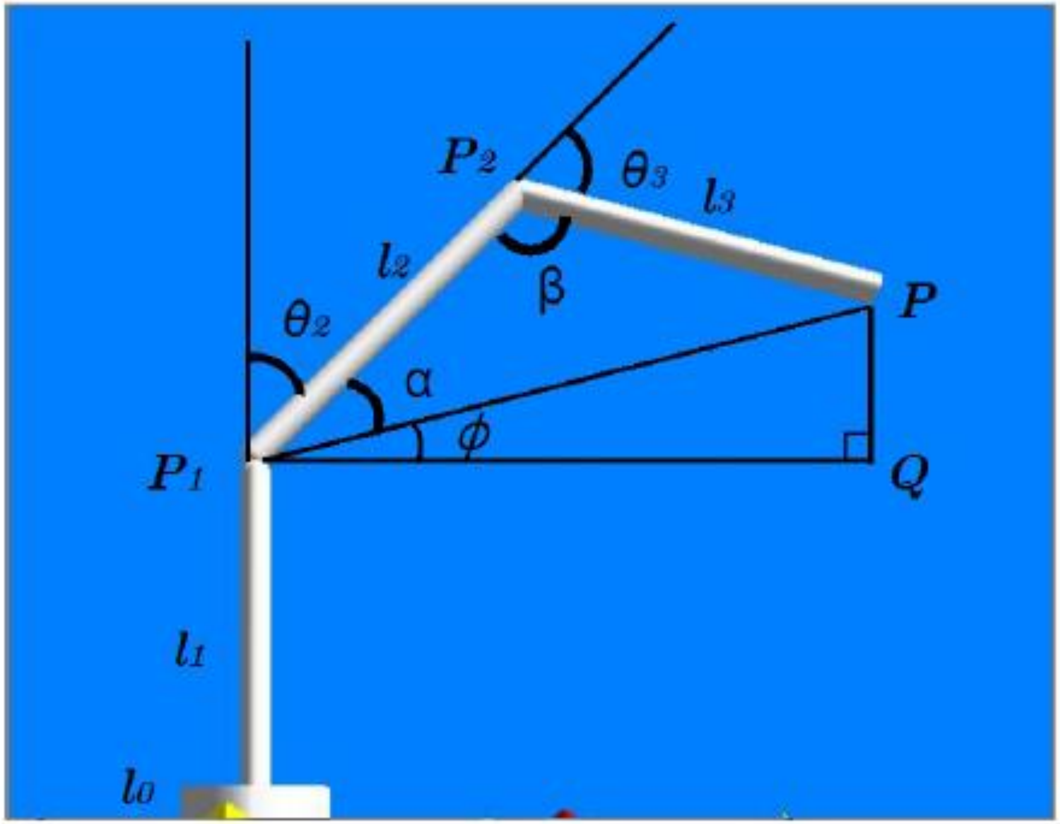


図 6.22　真横から見た図

教科書P174から転載

逆運動学の解

表 6.2　4 つの姿勢と関節角の組合せ

	θ_1	θ_2	θ_3
姿勢 1	$\mathrm{atan2}(P_y, P_x)$	$\frac{\pi}{2} - \phi - \alpha$	$\pi - \beta$
姿勢 2	$\mathrm{atan2}(P_y, P_x)$	$\frac{\pi}{2} - \phi + \alpha$	$\pi + \beta$
姿勢 3	$\mathrm{atan2}(P_y, P_x) + \pi$	$-(\frac{\pi}{2} - \phi - \alpha)$	$\pi + \beta$
姿勢 4	$\mathrm{atan2}(P_y, P_x) + \pi$	$-(\frac{\pi}{2} - \phi + \alpha)$	$\pi - \beta$

教科書P176から転載

逆運動学の解

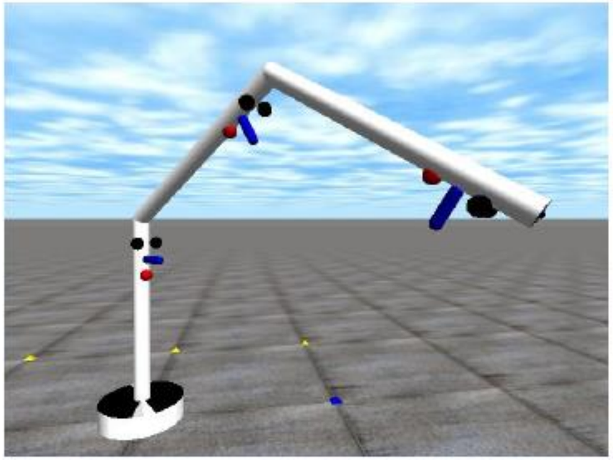


図 6.23　姿勢 1

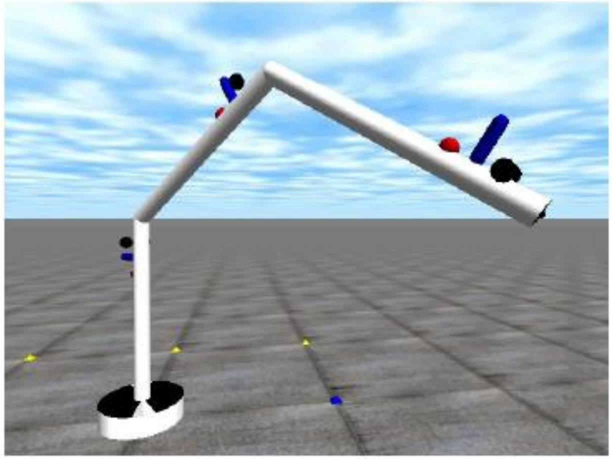


図 6.24　姿勢 3

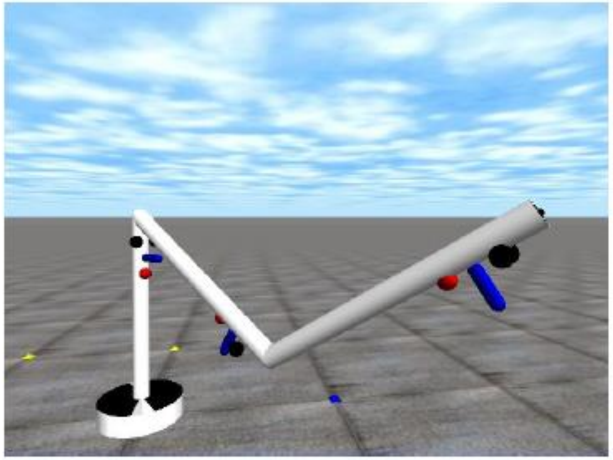


図 6.25　姿勢 2

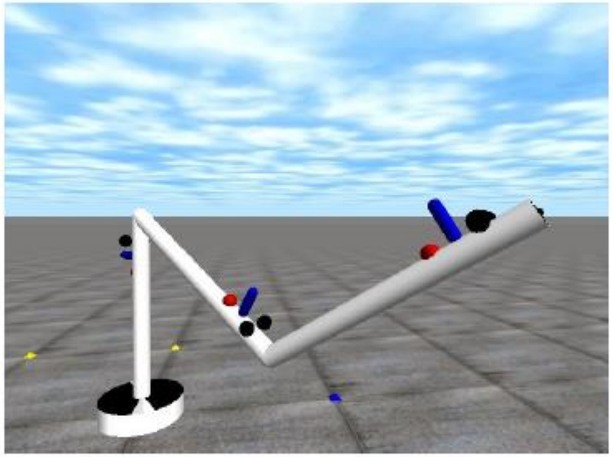
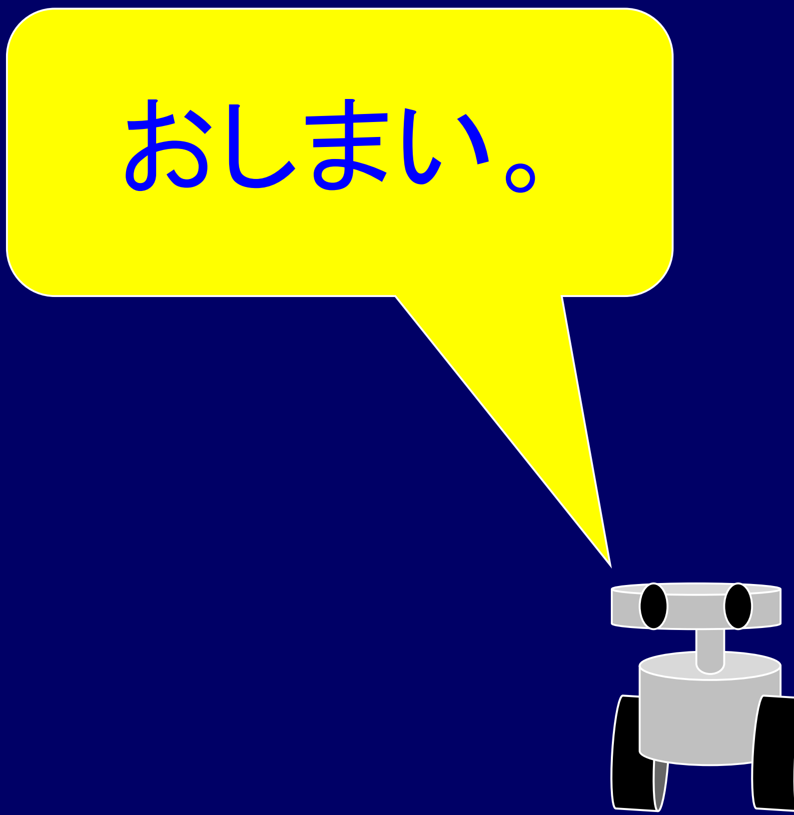


図 6.26　姿勢 4

教科書P176から転載

6.6 やってみよう　P180

- プログラム6.4を説明する
- プチプロ6.2, 6.3も重要なので説明する
  - 安全性
  - 例外処理


おしまい。